规范势分解理论与整体拓扑问题*

李希国（Xi-Guo Lee）

中国科学院近代物理研究所，730000， 兰州

国家自然基金支助；1157254

摘要： 利用段一士提出的规范势可分解和具有内部结构的思想，使用几何代数方法对 SO（n）群用单位矢量场进行了分解，给出了一般形式，并讨论这个分解的性质；由此给出了 SU（2）群和 U（1）群用单位矢量分解的形式，这正是著名物理学家法捷耶夫 1999 年所给出的结果。使用 SO（n）群规范势分解的一般形式讨论了 Gauss-Bonnet-Chern 密度的局域拓扑结构，其整体拓扑结构正好是 Gauss—Bonnet-Chern 定理，由拓扑结构很容易得到 Euler- Poincaré 示性数的 Morse 理论形式。利用 SU (2)群规范势分解研究了-1/2 Bose-Einstein 凝聚体，得到了一个新的环流条件，也是 Mernin-Ho 关系的推广。最后，使用段一士发现的三维黎曼几何的 Torsion 张量与 U（1）规范理论的关系，使用 U（1）规范势分解研究了位错线与 link 数的关系。

关键词：规范势分解；整体拓扑；纽结数

Pacs：11.15-q；02.40.Ma;02. 10.kn

一、引言

规范场理论[1]是研究四种基本相互作用的基础。电磁相互作用是 U（1）规范理论，强相互作用是 SU（3）规范理论，弱电统一（弱相互作用和电磁）是 SU（2）*U（1）规范理论，其中弱场质量通过 Higgs 机制得到解决，段一士的研究表明引力相互作用也是 GL（4）的规范理论[2]。前三种相互作用场的量子化可以通过路经积分量子化方法实现。但引力场的量子化到目前还没有完全解决。

规范场理论是杨振宁等人[1]54 年建立的，它的数学结构正好是陈省身上世纪五十年代建立的纤维丛[3]理论。粒子物理的发展离不开规范理论，所以，规范理论为物理学家研究物质的微观结构和相互作用起到了无法替代的作用，可以说在物理发展史上，牛顿的经典力学，爱因斯坦的相对论（包括广义相对论），麦克斯韦的电磁理论和杨振宁的规范理论都是化时代的。而规范理论是揭开微观物质结构的关键。

段一士在上世纪五十年代研究广义协变的 Dirac 方程[4]时，发现自旋联络可以用半度规表示出来，这就意味着，规范势可以用另外的场表示。上世纪 70 年代段一士和葛墨林在磁单极的研究中发现 SU（2）的规范势可以用单位矢量场表示。这就是规范势分解的来源。规范势可分解也是规范场研究中的具有重要学术意义的思想和方法。

近三十年来国外的物理学家[5]也认识到规范势是可以分解的，我国王凡团队用规范势分解的思想研究了质子自旋结构问题[6]，得到了很好的结果。

SO（n）的自旋联络分解是段一士及他的学生在上世纪九十年代进行的科研工作，自旋联络用单位矢量场分解可以用来研究 Gauss-Bonnet-Chern 密度的拓扑结构，这个结构的政体性给出了 Gauss-Bonnet-Chern 定理的一个完整证明，也很简单的得到 Euler- Poincaré 示性数在 Morse 理论中表示。看到了他们之间的联系。

规范势分解理论是研究物理中拓扑问题的有效方法，我们在五章中给出了几个拓扑问题的例子。从目前对规范场的研究来看，物理学家对它认识还不十分清楚，例如，什么是规范变换？如何理解规范场对核子自旋的贡献，从王凡教授的研究表明，如何在具体问题中选取代表真实的规范势？这个问题到现在还没有最后的答案。

二、规范势可分解理论

设 A, F, ϕ 分别是主丛 $P(\pi, M, G)$ 上的联络 1-形式（规范势），曲率张量 2-形式（规范场强）和截面（基本场），由规范理论可知，当联络 1-形式满足规范变换

$$A' = SAS^{-1} + dSS^{-1} \qquad \text{.......（1）}$$

时，曲率张量 2-形式满足谐变形式为

$$F' = SFS^{-1} \qquad \text{........（2）}$$

场及协变微商也满足谐变变换

$$\phi' = S\phi \qquad \text{.........（3）}$$

$$D\phi' = SD\phi \qquad \text{.........（4）}$$

这是规范理论的基础。满足规范变换的规范势 A 总可以分解为下列两部分[7]

$$A = A_1 + a \qquad \text{.........（5）}$$

要求他们分别满足规范变换和矢量协变变换，

即 $$A_1' = SA_1S + dSS^{-1}$$

$$\text{........(6)}$$

$$a' = SaS^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

时，$A_1 + a$ 仍然满足规范变换规律形式。进一步看 A_1 和 a 可由基本场来构成。这规范势分解的基础，具体问题可由具体场分解。进一步看，在具体的物理中如何选出真实的物理广泛场。

二、自旋联络用单位矢量场分解

设 M 是一紧致的 n 维黎曼流形，$\vec{\phi}$ 是 M 矢量丛上的一个光滑截面，定义一个单位矢量场

$$n^a = \phi^a / \phi, \qquad \phi = \left|\vec{\phi}\right|, \quad \phi^2 = \phi^a \phi^a, a = 1, \ldots, n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

显然，$\vec{n}$ 是 M 上球丛 $S(M)$ 的一个截面。可知 $\vec{\phi}$ 的零点正好是 n 的奇异点，且有自然约束，

$$n^a n^a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

及外微分

$$n^a dn^a = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

且

$$n^a D_\omega n^a = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

在 $SO(n)$ 规范理论中[2]黎曼流形上的矢量丛就是以 $G = SO(n)$ 为结构群的主丛 $p(\pi, M, G)$，其联络称为自旋联络，用 ω^{ab} 表示，设 x^μ 是底流形的局域坐标，则

$$\omega = \omega_\mu^{ab} dx^\mu, \omega^{ab} = -\omega^{ba} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

和曲率张量势形式为

$$F^{ab}(\omega) = d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega^{cb}$$ ....(13)

单位矢量的协变微商定义为

$$D_\omega n^a = dn^a - \omega^{ab} n^b,$$ ....(14)

且具有一个自然条件

$$n^a D_\omega n^a = 0.$$ ....(15)

设 γ_a 为 n 维 Dirac 矩阵，满足 Clifford 代数

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\delta_{ab}$$ ....(16)

$SO(n)$ 群的生成元为

且有关系

$$[I_{ab}, \gamma_c] = \gamma_a\delta_{bc} - \gamma_b\delta_{ac}$$ ....（18）

自旋联络和曲率张量可表示为

$$\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab} I_{ab}, \qquad F(\omega) = \frac{1}{2} F^{ab}(\omega) I_{ab}$$ ....（19）

在几何代数理论[8]中，设 γ_a 为基矢，单位矢量 $\vec{n}$ 能表示为矩阵形式

$$n = n^a \gamma_a$$ ....(20)

被称为几何代数中矢量， $\omega, F(\omega)$ 分别是几何代数中的 2 矢量. 几何代数中任意矢量 h，f ，则他们的几何积为

$$fh = f^a h^a + (f^a h^b - h^a f^b) I_{ab}, \quad \ldots\ldots (21)$$

由此定义可证明

$$nn = n^a n^a = 1, \qquad dnn + ndn = 0, \quad \ldots\ldots (22)$$

协变微商

$$D_\omega nn + nD_\omega n = 0, \quad \ldots\ldots (23)$$

和

$$dnn = (dn^a n^b - n^a dn^b) I_{ab} \quad \ldots\ldots (24)$$

$$nD_\omega n = (n^a D_\omega n^b - n^b D_\omega n^a) I_{ab} \quad \ldots\ldots (25)$$

由此可得

$$D_\omega n = dn - [\omega, n], \quad \ldots\ldots (26)$$

$$F(\omega) = d\omega - \omega \wedge \omega \quad \ldots\ldots (27)$$

设 T_r 是几何代数中的 r 矢量[8]

$$T_r = \frac{1}{r!} T^{a_1 a_2 \ldots\ldots a_r} \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \ldots\ldots \gamma_{a_r} \quad \ldots\ldots (28)$$

可以证明协变微商 1-形式为

$$D_\omega T_r = dT_r - [\omega, T_r] \quad \ldots\ldots (29)$$

由上面可得自旋联络能表示为

$$\omega = \frac{1}{2}(dnn + nD_\omega n) + \frac{1}{2} J_n(\omega), \quad \ldots\ldots (30)$$

式中引入了

$$J_n(\omega) = n\omega n + \omega. \quad \ldots\ldots (31)$$

上面两式就是自旋联络用单位矢量场分解的一般形式[9]，可以证明这种分解有三个性质；

1）具有整体性：

设 $\{W, V, U, \ldots\}$ 是 M 上的一个开覆盖，S_{VU} 是转换函数，且满足

$S_{VV}=1, S^{-1}_{VU}=S^{-1}_{UV}, S_{WV}S_{VW}=1$，$W\cap V\cap U\neq 0$ 对于任意开领域 V和U，如果 $V\cap U\neq 0$ 则

$$n_V = S_{VU} n_U S_{VU}^{-1}$$

这里 n_U和n_V 分别是 U和V 上的单位矢量场[9]，自旋联络满足关系

$$\omega_V = S_{VU}\,\omega_U\,S_{VU}^{-1} + ds_{VU}\,S_{VU}^{-1}$$

这是主从 $P(\pi, M, G)$ 上存在联络的基本要求。其实 S_{VU} 正是规范变换，用 S 表示，由分解式（3）式可得

$$\frac{1}{2}(dn_V n_V + n_V D_{\omega_V} n_V + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega_V) = S[\frac{1}{2}(dn_U n_U + n_U D_{\omega_U} n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)]S^{-1} + dSS^{-1}$$

上式相减得

$$\begin{aligned}&\omega_V - [\frac{1}{2}(dn_V n_V + n_V D_{\omega_V} n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega_V)]\\ &= S\{\omega_U - [\frac{1}{2}(dn_U n_U + n_U D_{\omega_U} n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)]\}S^{-1}\end{aligned}$$

这一关系说明在开邻域 U 上自旋联络分解形式

$$\omega_U = \frac{1}{2}(dn_U n_U + n_U D_{\omega_U} n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)$$

成立时，则在开邻域 V 上自旋联络分解形式

$$\omega_V = \frac{1}{2}(dn_V n_V + n_V D_{\omega_V} n_V + \frac{1}{2} J_{n_V}(\omega_V))$$

一定成立。

2）分解形式不依赖具体矢量场的选取

设 $\vec{k}$ 为另一独立于 $\vec{n}$ 的矢量场， nk 也是几何代数中矢量，而 构成几何代数中 2-矢量，它的协变微商为

$$D_\omega(nk) = d(nk) - [\omega, nk],$$

经过简单运算[10]得：

$$\frac{1}{2}(dnn + nD_\omega n) + \frac{1}{2} J_n(\omega) = \frac{1}{2}(dkk + kD_\omega k) + \frac{1}{2} J_k(\omega)$$

这说明一般分解式不依赖于单位矢量场的具体选取。

3）分解中的截断问题

设 $b = \frac{1}{2} B^{ab} I_{ab}$ ，且 $b' = SbS^{-1}$ 是 $SO(n)$ 李代数中的任意元素，总可以构造一个分解中的 a 为[10]

$$a = \frac{1}{2}(nbn + b),$$

$$b = \frac{1}{2} B^{ab} I_{ab} \qquad \text{......(32)}$$

显然， a 满足变换

$$a' = SaS^{-1}, \qquad \text{.......(33)}$$

将分解（1）式中的 A 用 ω 代替后代入（31）得

$$J_n(\omega) = n(\omega_1 + b)n + \omega_1 + b = J_n(B), \qquad \text{......（33）}$$

式中 $B = \omega_1 + b$ ......（34）

由于 a 是任意的，所以， B 也具有任意性，且满足规范变换

$$B' = SBS + dSS^{-1}$$

是一个任意联络，因此自旋联络的一般分解式也可以写为[10]

$$\omega^{ab}=(dn^a dn^b-n^a dn^b+n^a D_\omega n^b-n^b D_\omega n^a)+\frac{1}{2}J_n^{ab}(B) \quad \text{.....}(35)$$

其规范场强的分解为

$$F^{ab}(\omega)=-D_B n^a\wedge D_B n^b+D_\omega n^a\wedge D_\omega n^b+n^a D_B D_\omega n^b-n^b D_B D_\omega n^a$$

$$+F^{bc}(B)n^c n^a+F^{ac}(B)n^c n^b+F^{ab}(B) \quad \text{.......}(36)$$

这个性质在实际应用中非常重要，因为，在一般分解形式（30）式中规范势是循环的，而这个性质表明规范势 B 可以是任意的。这给具体问题中选取提供了依据。

四、U（1）和 SU（2）规范势的分解

在实际问题中普遍遇到的是 U（1）和 SU（2）规范势的问题，所以他们的规范势分解形式很重要。

1) U(1) 规范场的一般分解形式

设 T 为 U(1) 群的生成元，则与 SO（2）群的生成元之间存在关系[11]

$$T=\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}I^{ab},I^{ab}=\varepsilon_{ab}T \quad \text{......}(37)$$

定义 U（1）群的规范势为

$$A=\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\omega^{ab},\omega^{ab}=\varepsilon_{ab}A \quad \text{......}(38)$$

U(1) 群的规范势与 SO(2) 群的规范势对偶，可以证明，此时 $J_n(B)=0$，由（35）和（36）式得

$$\omega^{ab}=dn^a n^b-n^a dn^b+n^a D_\omega n^b-n^b D_\omega n^a \quad \text{.......}(39)$$

$$F^{ab}(\omega)=-2dn^a\wedge dn^b+dn^a\wedge D_\omega n^b-dn^b\wedge D_\omega n^a$$

$$+n^a D_\omega n^b-n^b D_\omega n^a \quad \text{............}(40)$$

U(1) 群的规范 势和规范场强的一般分解形势为

$$A=\varepsilon_{ab}(dn^a n^b+n^a D_A n^b) \quad \text{..............}(41)$$

$$F(A)=\varepsilon_{ab}dn^a\wedge n^b+\varepsilon_{ab}(dn^a\wedge D_A n^b+n^a dD_A n^b) \quad \text{.........}(42)$$

当 $\vec{n}$ 为规范平行单位矢量式，即 $D_A n^a=0,$ 分解 U(1) 规范势分解为

$$A_{//}=\varepsilon_{ab}dn^{a}n^{b}$$ ....（43）

$$F(A_{//})=-\varepsilon_{ab}dn^{a}\wedge n^{b}$$ ....（44）

可以证明 A 与 $A_{//}$ 之间相差一规范变换[11]。

2）SU（2）规范势的一般分解形式

SO（3）群和 SU（2）群具有相同的局域结构， 换言之，它们具有相同的李代数结构。设 T^{a} 是 SU（2）群的生成元，与 SO（3）群生成元 的关系为

$$T^{a}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}I^{bc},I^{ab}=\varepsilon_{abc}T^{c}$$ ....（45）

SU（2）群规范势与 SO（3）群规范势之间的关系为

$$A^{a}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\omega^{ac},\omega^{ab}=\varepsilon_{abc}A^{c}$$ ....（46）

规范张量之间的关系为

$$F^{a}(A)=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F^{bc}(\omega),\omega^{ab}=\varepsilon_{abc}F^{c}(A)$$ ....（47）

$$J_{n}^{a}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{n}^{ab}(\omega)$$ ....（48）

经过简单计算

$$J_{n}^{a}(A)=2Zn^{a}$$ ....（49）

式中， $Z=A^{c}n^{c}$ ....（50）

是 SU（2）规范变换在单位矢量上投影。

SO(3)群规范势和规范场强的一般分解形式

$$\omega^{ab}=dn^{a}n^{b}-n^{a}dn^{b}+n^{a}D_{\omega}n^{b}-n^{b}D_{\omega}n^{a}+\varepsilon_{abc}Zn^{c}$$ ....(51)

$$F^{ab}(\omega)=-dn^{a}\wedge n^{b}+D_{\omega}n^{a}\wedge D_{\omega}n^{b}-n^{b}dD_{\omega}n^{a}+n^{a}D_{\omega}n^{b}+$$

$$(D_{\omega}n^{c}-dn^{c})\wedge Z\varepsilon_{cad}(n^{d}n^{b}-n^{d}n^{a})+\varepsilon_{abc}dn^{c}\wedge Z$$ ....(52)

SU（2）群规范势和规范场强的一般分解形式

$$A^{a}=\varepsilon_{abc}dn^{b}n^{c}+\varepsilon_{abc}n^{b}D_{A}n^{c}+Zn^{a}$$ ....(53)

$$F^{a}(A)=dZn^{a}-\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}dn^{b}\wedge dn^{c}+\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}D_{A}n^{b}\wedge D_{A}n^{c}+\varepsilon_{abc}n^{b}dD_{A}n^{c}$$

$$-Z\wedge D_A n^a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

（53）式和（54）式整是著名物理学家 Fadeev 等人 1999 年给出的结果[5]

当 $\vec{n}$ 为规范平行单位矢量时，即 $D_A n^a = 0$ ，则

（53）和（54）式变为

$$A_{//}^{a} = \varepsilon_{abc} n^b n^c + Z n^a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

$$F^a(A_{//}) = dZn^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} dn^b \wedge dn^c \qquad \ldots\ldots (56)$$

当取轴规范条件 $Z = A^c n^c = 0$ 时 ，(55)式,(56）式

变为

$$A_{//}^{a} = \varepsilon_{abc} dn^b n^c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

$$F^a(A_{//}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc} dn^b \wedge n^c \qquad \ldots\ldots. (58)$$

五、拓扑问题中的应用

1）GAUSS-BONNET--CHERN 密度的拓扑结构和 GAUSS-BONNET-CHERN 定理

在 SO（N）群自旋联络的一般分解式（35）中，联络 B 可以是任意的，这里取平联络

$$\mathrm{B}_0 = UU^{-1} \qquad \ldots\ldots. （59）$$

式中 U 是 SO（N）群自旋表示的局域矩阵。(35)式变为

$$\omega = \frac{1}{2}\left(dnn + nD_\omega n\right) + \frac{1}{2}J_n\left(B_0\right) \qquad \ldots\ldots （60）$$

其中，

$$J_n\left(B_0\right) = nB_0 n + B_0 \qquad \ldots\ldots. （61）$$

对于平联络，则 $F\left(B_0\right) = 0$ ，由（36）式得

$$F(\omega) = \frac{1}{4}[-D_0 n\wedge D_0 n + D_\omega n\wedge D_\omega n + nD_\omega n - dD_\omega nn$$
$$+D_\omega n\wedge(B_0 n + nB_0) - (B_0 n + nB_0)\wedge D_\omega n],$$
$$\ldots\ldots\ldots (62)$$

式中，

$$D_0 n = dn - [B_0, n]$$

最后得

$$\omega^{ab}=dn^a n^b-dn^b n^a+n^a D_\omega n^b-n^b D_\omega n^a+\frac{1}{2}J_n^{ab}(B_0),$$
$$F^{ab}(\omega)=-D_0 n^a\wedge D_0 n^b+D_\omega n^a\wedge D_\omega n^b+n^a D_0 D_\omega n^b-n^b D_0 D_\omega n^a$$

. . . . (63)

式中

$$J_n^{ab}(B_0)=2(B_0^{bc}n^c n^a-B_0^{ac}n^c n^b+B_0^{ab}) \quad \text{. . . . . . . (64)}$$

$$D_0 n^a=dn^a-B_0^{ab}n^b \quad \text{. . . . . . . (65)}$$

当 $B_0=0$ 时，就是文献[12] 的结果。

对于一个紧致定向的黎曼流形 M ，存在一个独立的 Λ n-形式

$$\Lambda=\frac{(-1)^{n/2}}{2^n\pi^{n/2}(n/2)!}\varepsilon_{a_1a_2\ldots\ldots,a_{n-1}a_n}F^{a_1a_2}(\omega)\wedge\ldots\wedge F^{a_{n-1}a_n}(\omega),$$

是一个闭的 n-形式. π 是一个自然投影，则在球丛 $S(M)$ 上存在关系

$$\pi^*\Lambda=d\Omega$$

Chern S.S. 证明[13]（n-1)形式 Ω 为

$$\Omega=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_{k=0}^{n/2-1}(-1)^k\frac{2^{-k}}{(n-2k-1)!!k!}\Theta_k,n\geq 4$$

称它为 chern 形式，其中

$$\Theta_k=\varepsilon_{a_1a_2\ldots,a_{n-2k}a_{n-2k+1}a_{n-2k+2}\ldots,a_{n-1}a_n}n^{a_1}D_\omega n^{a_2}\wedge\ldots\wedge D_\omega n^{a_{n-2k}}\wedge\ldots$$
$$\wedge F^{a_{n-2k+1}a_{n-2k+2}}(\omega)\wedge\ldots\wedge F^{a_{n-1}a_n}(\omega)$$

. . . . . . (66)

式中 F^{ab} 就自旋联络对应的联络。使用 Bianchi 恒等式 $DF^{ab}(\omega)=0$，可以证明

$$D\Lambda=0.$$

这意味着 Λ 独立于自旋联络，取决于上同调群 $H^n(M)$，这等价说 $\int_M$ 是一个拓扑不变量[14]，被称为 Euler-Poincre 示性类 $\chi(M)$.

著名的 Gauss-Bonnet-Chern 定理为

$$\chi(M)=\int_M\Lambda=\int_M\vec{n}^*\pi^*\Lambda=\int_M\vec{n}^*d\Omega \quad . \quad \text{. . . . . . . (67)}$$

将上面 B 取 B_0 时的自旋联络的规范场强代入 θ 得

$$\Theta_k=\sum_{l=0}^{k}(-1)^k C_k^l(-1)^l \varepsilon_{a_1a_2\dots,a_{n-2k}a_{n-2k+1}a_{n-2k+2}\dots,a_{n-2k+2l-1}a_{n-2k+2l}a_{n-2k+2l+1}a_{n-2k+2l+2}\dots,a_{n-1}a_n}$$

$$n^{a_1}D_\omega n^{a_2}\wedge\dots,\wedge D_\omega n^{a_{n-2k}}\wedge D_\omega n^{a_{n-2k+2l+1}}\wedge D_\omega n^{a_{n-2k+2l+2}}\wedge\dots,$$

$$\wedge D_\omega n^{a_{n-2k+2l-1}}\wedge D_\omega n^{a_{n-2k+2l}}\wedge D_0 n^{a_{n-2k+2l+1}}\wedge D_0 n^{a_{n-2k+2l+2}}\wedge\dots,$$

$$\wedge D_0 n^{a_{n-1}}\wedge D_0 n^{a_n} \qquad \dots\dots\dots\dots (68)$$

其中，

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

因为，$D_\omega\vec{n}$ 和 $D_0\vec{n}$ 都垂直于矢量 $\vec{n}$，设

$$D_\omega n^a-D_o n^a=\alpha K^a, \qquad \dots\dots\dots\dots (69)$$

α 是一个比例系数，故有

$$n^a k^a=0 \qquad \dots\dots\dots\dots (70)$$

所以，

$$k^a dn^a+n^a dk^a=0,\quad n^a D_\omega k^a+k^a D_\omega n^a=0,\quad n^a D_0 k^a+k^a D_0 n^a=0$$

又由上面可得

$$D_\omega n^a=D_0 n^a-k^a n^b(D_\omega k^b-D_0 k^b) \qquad \dots\dots\dots (71)$$

代入前面的(68)中，经过化简，可得

$$\Theta_k=\begin{cases}\varepsilon_{a_1a_2\dots,a_n}(n^{a_1}D_0 n^{a_2}\wedge\dots,\wedge D_0 n^{a_n} \\ -(n-1)n^{a_1}k^{a_2}n^{b_2}(D_\omega k^{b_2}-D_0 k^{b_2})\wedge\dots,\wedge D_0 n^{a_n}), & if, k=0 \\ -2\varepsilon_{a_1a_2\dots,a_n}n^{a_1}k^{a_2}n^{b_2}(D_\omega k^{b_2}-D_0 k^{b_2})\wedge\dots,\wedge D_0 n^{a_n}, & if, k\succ 1\end{cases}$$

$$\dots\dots\dots (72)$$

最后得

$$\Omega=\frac{1}{(n-1)!A(S^{n-1})}\varepsilon_{a_1a_2\dots,a_n}n^{a_1}D_0 n^{a_2}\wedge\dots,\wedge D_0 n^{a_n}$$

$$\dots\dots\dots (73)$$

其中，

$$A(S^{n-1})=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \qquad \dots\dots\dots (74)$$

使用几何代数，能构造平联络 $B_0 = dUU^{-1}$ ，我们能取一个简单的矩阵形式

$$U = nl, \quad U^{-1} = \ln$$

其实，它是 SO（n）群的一个局域旋表示，在几何代，$\vec{l}$ 垂直于 $\vec{n}$ 的另一矢量，且有

$$nl + \ln = 0$$

$$B_0 = dnn + ndl\ln$$

由此可得

$$D_0 = -dn^a + 2l^a l^b dn^b$$

和

$$\Omega = \frac{1}{(n-1)!A(S^{n-1})}\varepsilon_{a_1a_2\ldots,a_n} n^{a_1} dn^{a_2} \wedge \ldots, \wedge dn^{a_n} \qquad \ldots\ldots\ldots (75)$$

这是一个（n-1)形式，表示成球丛上一个单位矢量场的形式，将球丛的一个纤维的结果推广到所有纤维。

使用 ϕ 映射方法[15]，（n-1)形式Ω的外微分拉回到 M 上有

$$\vec{n}^* d\Omega = \delta(\vec{\phi}) D(\phi / x) d^n x \qquad \ldots\ldots\ldots (76)$$

M 上 Gauss-Bonnet-Chern 密度为

$$\rho = \frac{1}{(n-1)!A(S^{n-1})}\varepsilon_{a_1a_2\ldots,a_n}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots,\mu_n}\partial_{\mu_1}n^{a_1}\partial_{\mu_2}n^{a_2}\ldots,\partial_{\mu_n}n^{a_n} = \delta(\vec{\phi})D(\phi / x) \qquad \ldots\ldots\ldots (77)$$

这两表达式告诉我们，仅仅当 $\vec{\phi} = 0$ 时，才有

$$\rho \neq 0, and \quad \vec{n}^* d\Omega \neq 0$$

假设 $\vec{\phi}$ 有 N 个孤立零点，在 M 上，让零点在

$\vec{x} = \vec{z}_i \ (i = 1,2,\ldots,N)$ 处，则 $\delta(\vec{\phi})$ 能表示为

$$\delta(\vec{\phi}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i \delta(\vec{x} - \vec{z}_i)}{\left| D(\phi / x) \right|_{\vec{x} = \vec{z}_i}}, \qquad \ldots\ldots\ldots (78)$$

这里 β_i 是第 i 零点的 Hopf 数，是正整数。设 η_i 是第 i 零点的 Brouwer 度

$$\eta_i = \operatorname{sgn} D(\phi / x) \big|_{\vec{x} = \vec{z}_i} = \pm 1. \qquad \ldots\ldots\ldots (79)$$

则 M 上的 GNC 密度(77)式的扑结构如下

$$\rho = \delta(\vec{\phi})D(\phi / x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \eta_i \delta(\vec{x} - \vec{z}_i). \qquad \cdots\cdots\cdots (80)$$

这表示，GNB 密度能用零点的 Brouwer 度和 Hopf 指数表示。积分得

$$\chi(M) = \int_M \rho d^n x = \int_M \vec{n}^* d\Omega = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \beta_i \eta_i \qquad \cdots\cdots (81)$$

另一方面，我们有

$$\chi(M) = \int_M \delta(\vec{\phi})D(\phi / x)d^n x = \deg\phi \int_V \delta(\vec{\phi})d^n \phi = \deg\phi \qquad \cdots\cdots\cdots (82)$$

和

$$\deg\phi = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \eta_i \qquad \cdots\cdots\cdots (83)$$

V 是矢量空间 $\vec{\phi}$ 的体积，$\deg\phi$ 是映射 $\vec{\phi}$ 的映射度。

设 f 是 流形 M 上的 Morse 函数，如果一个点 p, 则 f 满足

$$df\Big|_p = \partial_\mu f dx^\mu\Big|_p = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (84)$$

则，点 p 是函数 f 的临界点。

定义矩阵为

$$\{H_p f\}_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu f \qquad \cdots\cdots\cdots (85)$$

如果在 p 点有

$$\det H_p f \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (86)$$

则，矩阵

$$H_p f = \{\partial_\mu \partial_\nu f\} \qquad \cdots\cdots\cdots (87)$$

被称为 Hessian 矩阵。设（$g^{\mu\nu} = e^{a\mu} e^{a\nu}$）

$$\phi^a = e^{a\mu} \partial_\mu f \qquad \cdots\cdots\cdots (88)$$

临界函数 f 的零点就是矢量场 ϕ^a 的零点。微分得

$$\partial_\mu \phi^a \Big|_p = e^{av} \partial_\mu \partial_v f \Big|_p \qquad \text{..........} (89)$$

使用关系

$$\varepsilon_{a_{,\dots,} a_n} e^{a_1\mu_1}, \dots, e^{a_n\mu_n} = \varepsilon^{\mu_1,\dots,\mu_n} \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad \text{........} (90)$$

因此，得到

$$D(\phi / x)\Big|_p = \frac{1}{\sqrt{g}} \det \ H \Big|_p f \qquad \text{.......} (91)$$

最后得到

$$n'^* d\Omega = \sum_{n=1}^{N} \beta_i \delta(\vec{x} - \vec{p}_i) \frac{\det H_p f}{\left|\det H_p f\right|}\Bigg|_{p_i} d^n x \qquad \text{......} (92)$$

所以，

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \frac{\det \ H_{p_i}}{\left|\det \ H_{p_i}\right|} \qquad \text{..........} (93)$$

在 Morse 理论中，Morse 函数为

$f = f(p_i) - (x^1)2 - \dots - (x^{\lambda_i})^2 + \dots + (x^n)^2$ 这里 $\lambda_i(f) = 0,1,\dots,n$. 跟据 ϕ^a 的单值性, 则 $\beta_i = 1$,

所以，我们得到 Gauss-Bonnet-Chern 定理的 Morse 结果

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{\lambda_i(f)}. \qquad \text{.........} (94)$$

我们从 GBC 密度的拓扑结构给出了 GBC 定理的 Morse 理论中结果，整体拓扑结构由零点的局域拓扑结构决定[10, 16]。

2）SU（2）规范场分解与 Bose-Einstein 凝聚体中的环流条件

Bose-Einstein 凝聚体是凝聚体物理中一类很重要物质，他有什么整体性质对人们研究它有很大的帮助，我们发现了一个环流条件与拓扑有关。

在 SU(2)规范场分解中，考虑规范场强在单位矢量场 $n^a(a = 1,2,3)$ 上的投影，由（54）式得

$$F^a n^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} n^a Dn^b \wedge Dn^c = dZ - \frac{1}{2} n^a dn^b \wedge dn^c = f_{\mu\nu}$$

.......(95)

这里，$f_{\mu\nu} = \partial_\mu Z - \partial_\nu Z - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} n^a \partial_\mu n^b \wedge \partial_\nu n^c$ 是’t Hooft 张量。

一般的旋量 Bose 凝聚体的序参数选为

$$\langle \psi \rangle = \zeta(x,t)\phi(x,t)$$ .... (95)

其中，ψ 是场算子，ϕ 是一个标量场，ζ 是一个归一化旋量场。

对于自旋为 1/2 的 bose 气体的二分量凝聚体，其序参量是一个旋量[17]。凝聚体内不存在正真的 SU（2）对称性，但当两个分量的散射长度相等时，其内部是一个近似的 SU（2）对称性，上述序参数是一个二分量旋量场，我们引入 SU（2）的规范场 $B_\mu = B_\mu^a \frac{\sigma^a}{2i} (\mu = 0,1,2,3)$， 为了消除非物理规范自由度,取

$$D_\mu |\psi\rangle = (\partial_\mu - B_\mu)|\psi\rangle = 0$$ ....(96)

考虑波函数

$$|\psi\rangle = \sqrt{N(\vec{r})}\zeta$$

其中，$N = \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle = \zeta^+ \vec{\sigma} \zeta$ 从约束条件得

$$B_\mu^a = 2i\zeta^+ \sigma^a \partial_\mu \zeta$$

为了给出自旋规范势与超流体速度之间的关系，

考虑规范场 $\vec{B}_\mu$ 在平均自旋方向上的投影 $Z_\mu = B_\mu^a N^a$

可以将投影 Z 的空间分量 $\vec{z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ 写成

$$\vec{Z} = 2M\vec{u}_s / \hbar$$

式中 $\vec{u}_s = (\hbar / Mi)\zeta^+ \nabla \zeta$ 是超流体速度。在绕平均自旋方向所做的 U（1）转动下保持不变.’tHooft 张量与超流体速度的关系为

$$f_{\alpha\beta}=\frac{2M}{\hbar}(\partial_\alpha u_\beta-\partial_\beta u_\alpha)-\varepsilon_{abc}N^a\partial_\alpha N^b\partial_\beta N^c$$ .....(97)

其中，$\alpha,\beta=1,2,3$.进一步,在奇点以外,发现超流体的速度如下:

$$\frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}_s=(\frac{\hbar}{8M})\varepsilon_{abc}N^a(\nabla N^b\times\nabla N^c)+\frac{\hbar}{8M}\nabla N^a\times\vec{B}^a$$ ....(89)

其中，$\vec{B}^a=(B_1^a,B_2^a,B_1^a)$.这个关系说明了超流体旋度一个新结构,它不仅依赖于平均自旋 $\vec{N}(\vec{r})$ 而且依赖于 $\vec{B}^a$ 场的分布,是 Mernin-Ho 关系的推广。

考虑，在一个以 C 为边界的曲面 Σ 上的积分，

我们知道积分 $\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma f_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu=n_{th}$ ，是一个拓扑整数.

因此,我们得到自旋-1/2 凝聚体的环流条件:

$$M\oint_C\vec{u}\cdot d\vec{l}=\frac{\hbar}{4}\int_\Sigma\varepsilon_{abc}N^a(\nabla N^b\times\nabla N^c)\cdot d\vec{\sigma}+\frac{\hbar}{2}n_{th}$$ ....(90)

这一个新的拓扑约束,它明显不同于单分量 Bose 凝聚体的环流条件.关系(22)式也表明了平均自旋方向如何对环流的贡献.使得环流仅仅在 $\vec{N}(\vec{r})$ 场的特殊构形下才能量子化[18].

3) Riemann-Cartan 流形上 Torsion 结构与纽结

纽结是非常普遍的现象，上世纪末，物理学家在场论中也发现了它，我们在固体位错中发现，位错线可能形成 link 数。通过 Torsion 张量在矢量场的投影引入 U(1)规范势，从而利用规范势分解看到固体中位错线的几何可能形成 link 圈。

设 U_3 是一个 3 维 Riemann-Cartan 时空流形,其 Vierbein 场和自旋联络分别为

$$e^A=e_\mu^{\ A}(x)dx^\mu,\omega_\mu^{\ A}{}_B(x)=\omega_\mu^{\ A}{}_B(x)dx^\mu$$

式中，$\mu,\ldots,\nu=0,1,2,$ 是时空流行指标，$A,\ldots,C=1,2,3$ 是 Lorentz 指标。

Torsion 张量定义[19]

$$T^{A}{}_{\mu\nu}=D_{\mu}e^{A}{}_{\nu}-D_{\nu}e^{A}{}_{\mu} \qquad ....(91)$$

其中,

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}-\omega_{\mu}(x),\omega_{\mu}=\frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{AB}I_{AB} \qquad ....(92)$$

设 N^{A} 是一个规范平行单位矢量场，则

$$D_{\mu}N^{A}=0$$

Torsion 张量在 $\vec{N}$ 上的投影

$$T_{\mu\nu}=T^{A}{}_{\mu\nu}N^{A}, \qquad ....（93）$$

$$T_{\mu\nu}=\partial_{\mu}B_{\nu}-\partial_{\nu}B_{\mu}, \qquad ....(94)$$

其中，

$$B_{\mu}=e_{\mu}^{A}N^{A} \qquad ....(95)$$

是一个 U（1）规范势，torsion 张量相当 U(1)规范场强，对于任意给定的一个二维面 $\Sigma\subset R_{3}$ 可以定义这个面的积分 l_{Σ} 为

$$l_{\Sigma}=\int_{\Sigma}T_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} \qquad ....（96）$$

其中, $d\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}dx^{\mu}\wedge x^{\nu}$ 是二维面 Σ 的面元, $T_{\mu\nu}(x)$ 对应 缺陷密度, l_{Σ} 对应二维面 Σ 上缺陷通量。

投影的 torsion 似一个 U（1）解构，在三维 Riemann-Catan 空间，这个结构意味存在 Chren-simons 作用量

$$L_{C\text{-}S}=\frac{k}{4\pi}\int_{M}d^{3}xe^{\mu\nu\lambda}B_{\mu}T_{\nu\lambda} \quad . \qquad ....(97)$$

Chern-Simons link 不变量，对于流形 M，规范不变和度规独立的量应该是一些拓扑不变量。对于 Abelian 情况，S.AlBeverio 给出了一个严格的数学证明。设 C 是 R3 中的一个定向的闭曲线，对于一般的李群 G，考虑场函数沿 C 的平移，段一士和 葛墨林（1974）及 Wilson（1974）给出了一个平移变换算子

$$W_{R}(C)=Tr_{R}p\exp\{i\oint_{C}A_{\mu}dx^{\mu}\}, \qquad ....(98)$$

式中 $A_{\mu}=A_{\mu}^{a}T_{a}$ 是规范势，R 表示李群 G 的不可约表示，P 表示沿 C 的路径积

分。 $W_R(C)$ 实际上是沿 C 的 Holonomy 群元的积。对于我们的 Abelia 情况，

$$W_R(C)=P\exp\{in_R\oint_C B_\mu dx^\mu$$

式中 $n_R\in Z$ 涉及李群 U（1）的表示. 设 L 是 M 中的一个 LinK，我们取 r 定向的无交的纽结（knotes） $C_i(i=1,2,...,r)$ ，让表示 R_i 对应 C_i，则真空期望值：

$$<\prod_{i=1}^{r} w_{R_i}(C_i)>=Z_{C-S}^{-1}\int_M DB_\mu\prod_{i=1}^{r} w_{R_i}(C_i)\exp\{iL_{C-S}\}$$

.... (99)

式中 Z_{C-S} 是规一化因子，

$$Z_{C-S}=\int_M DB_\mu\exp\{iL_{C-S}\} \qquad ....(100)$$

使用曲线 δ 函数和路径积分，我们易得

$$<\prod_{i=1}^{r} w_{R_i}(C_i)>=\exp\{i\frac{\pi}{k}(n_{R_i}^2 L(C_i)+\sum_{i<j}^{r} n_{R_i}n_{R_j}L(C_i,C_j))\} \qquad ....(101)$$

这里 $L(C_i,C_j)$ 是 link 数，定义如下：

$$L(C_i,C_j)=\frac{1}{4\pi}\oint_{C_i} dx_i^\mu\oint_{C_j} dx_j^\nu\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\frac{(\vec{x}_i-\vec{x}_j)^\lambda}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|^3} \qquad ....(102)$$

对于闭曲线 C_i 和 C_j 来说，link 数 是个整数，也是个拓扑不变量。

为了给出涉及 Torsion loops 更多的解释，考虑 R3 中一个面 Σ ，M 中的 Wilson 线穿破面 Σ ，所以面 Σ 带有一定的点，在这个面上，U（1）规范变换相当于 SO（2）规范，那么，它们规范势之间有关系：

$$\omega_{\mu ab}=-(2\pi/\lambda)B_\mu\varepsilon_{ab} \qquad (a,b=1,2) \qquad ....(103)$$

这里 λ 是一个与维度相关的常数。代入（96）式得

$$l_\Sigma=\frac{\lambda}{\pi}\int_\Sigma T_{\mu\nu ab}\varepsilon^{ab}d\sigma^{\mu\nu} \qquad ....(104)$$

这里 $T_{\mu\nu ab}$ 相当于 SO（2）得规范场强：

$$T_{\mu\nu ab}=\partial_\nu\omega_{\mu ab}-\partial_\mu\omega_{\nu ab} \qquad ....(105)$$

由规范势分解（11）和（12）式得

$$\omega_{\mu ab} = n_a \partial_\mu n_b - n_b \partial_\mu n^a \qquad \text{.........(106)}$$

$$l_\Sigma = \frac{\lambda}{2\pi} \int_\Sigma \varepsilon^{ab} \partial_\mu n_a \partial_\nu n_b d\sigma^{\mu\nu} \qquad \text{........(107)}$$

这里 $n_a(x)$ 是涉及 SO(2) 联络的规范平行单位矢量场，即 $\partial_\mu n^a - \omega_{\mu ab} n^b = 0$.

使用 ϕ-mapping 方法得

$$l_\Sigma = \lambda \int_\Sigma J_{ab}(\frac{\phi}{u}) \delta^2(\vec{\phi}) du^a \wedge du^b, \qquad \text{.........(108)}$$

设面 Σ 的内部坐标为 u^1, u^2，雅可比为 $J_{\mu\nu}(\phi/x) = \varepsilon^{ab} \partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_b$，对固定的 μ, ν，

其中，$\phi_a = n_a \sqrt{\phi_a \phi_b}$ 是 Σ 上的矢量场。假定

$\phi_a(x)(a=1,2)$ 有 r 个孤立零点，第 k 个零点在 $u^a = z_k^a$ $(k=1,2,...r)$ 处，则

$$J_{ab}(\phi/u)\delta^2(\vec{\phi}) = \sum_{k=1}^{r} \eta_{ab}^k \delta^2(\vec{u} - \vec{z}_k) \qquad \text{.......(109)}$$

代入（108）式得

$$l_\Sigma = \lambda \int_\Sigma \sum_{k=1}^{r} \eta_{ab}^k \beta_k \delta^2(\vec{u} - \vec{z}_k) du^a \wedge du^b, \qquad \text{......(110)}$$

式中，$\mu_{ab}^k = sign J_{ab}(\phi/u)\big|_{u=z_k} = \pm 1$ 是映射 $u \to \phi$ 的 Brouwer 度。β_k 是映射

$u \to \phi$ 的 Hopf 指数。

因此，我们得到[20]

$$l_\Sigma = \lambda \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^{ab} \eta_{ab}^k \beta_k. \qquad \text{..........(111)}$$

因此，对于围绕边界 $\partial\Sigma$ 矢量场 $n^a(a=1,2)$ ，存在一个环绕数 $w(n, \partial\Sigma)$

$$w(n, \partial\Sigma) = \sum_k \varepsilon^{ab} \eta_{ab}^k \beta_k \quad , \qquad \text{........ (112)}$$

这说明缺陷的通量可以用环绕数量子化，是一个拓扑量。对于连续体中的位错，λ 是晶格常数，对应时空而言，λ 可能是 Planck 长度。

从上面讨论可知，Wilson loops（knots）可能是缺陷线，在面 Σ 上存在约束方程

$$T_{\mu\nu} = \lambda \sum_{k=1}^{r} \beta_k \frac{J_{\mu\nu}(\phi/u)}{\left|J_{\mu\nu}(\phi/x)\right|} \delta^2(x - z_k)\Big| \qquad \text{.........(113)}$$

六、结论

SO（n）规范势用单位矢量场给出了一般分解形式，而且使用几何代数性质得到了截断形式，也就是分解形式的 J_n 项中 ω 可以任意选取，这为我们讨论 Gauss-Bonnet-chern 密度的拓扑性质带来了极大的方便，而矢量场的零点正好反映了空间的拓扑性质，通过规范势用矢量场分解将他们的拓扑性质紧密地联系起来，很容易给出了著名的 Gauss-Bonnet-Chern 定理一个完整证明，并得到了 Euler- Poincaré 示性数的 Morse 理论形式，显示出了它们零点拓扑性质的统一。在另外两个例子中，也表明规范势分解这一思想的奇妙用处。

其实，王凡组利用规范势分解方法基本澄清了核子自旋成份中胶子场的贡献。所以，规范势可分解的思想也规范场研究中的亮点[21]，是我国科学家首先提出的。

参考文献：

1、C.N.Yang and R.Mills, phys.Rev.Lett.1954,**96:**191; arXiv:hep-ph/9812242Vl

2、Xi-Guo lee, NÖether's Theorem and Duan YiShi's Generalized Covariant Conservation Law，［李希国，诺特定理与段一士广义协变守恒定律，中国科学 G，2018；与该文同期］

3、AlbertS .Schwarz ,Topology For Physicists,(Springer-Verlag Press 1994).; C.Nash and S.Sen,topology and Geometry of Physicists, 1983, Academic pressinc(London)

4、Duan YiShi， The Generalized Covariant equation of the Field of an arbitrary spin basic Particle ， Journal of Lanzhou University，1958.**1**：29-34；

5、Y.M.Cho, Phys.Rev.D ,Restricted Gauge Theory,1980,**21**:1080-1090; Phys. Rev.Lett.Glueball Spectrum in Extended Quantum Chromodynmics,1981,**46**:302-309; Faddeev L.and Niemi Antti J.Partially Dual Variables InSU(2) Yang-Mills Yheory Phys.Rev.Lett.1999,**82**:1624-1627

6、Xiang-Song Chen， Xiao-Fu Lu,Wei-Min Sun, Fan Wang, and T. Goldman, Phys.Rev.Lett. Spin and orbited Angular momentum in guage Theories: Nucleon Spin Structure and Multipole Radiation Revisited,2008, **100:**232002-232006

7、Y.S.Duan, M.L.Ge, Su(2) Guage Theory and electrodynamics with N magnetic monopoles,Sci.Sinica， 1979, 9(11):1072-1081

8、C.Doran,D.Hestenes, F.Sommen and N.V.Acker J. Math. Phys.1993,**34**:3642

9、Yi-Shi duan, Xi-Guo Lee， General decomposition theory of spin connections, topological structure of Gauss-Bonnet-Chern density and Morse theory Helv. Phys. Acta, 1995, **68**:513

10、Duan yi-shi Li Xi-Guo， ,General decomposition theory of spin connection, topological structure in Gauss-Bonnet-Chern density，Commun.Ther.Phys.1998,**29**:237

11、Li Xi-Guo Duan yi-shi Song Jian-Jun, General decomposition theory of SO(n) gauge potential, CPC,2001,**25**:373

12、Duan Yi-Shi， X.H.Meng, J.Math.Phys.1993, **34**:1149

13、S.S.Chern Ann.Math.ASimple Intrinsic prof of the Gauss-Bonnet formula for closed Rienannian manifolds, 45,(1944) 747-752;

14、Xi-Guo Lee, General Decomposition Theory of Gauge potential, Gauss-Bonnet-Chern Therm and Inner Struture of Torsion, the Doctoral Dissertation, 1994, lanzhou University[李希国， 规范势的一般分解理论，Gauss-Bonnet-Chern 定理和绕率得内部结构，博士论文,1994, 兰州大学]

15、Duan Y.-S., Fu L.-B.The General decomposition thoery of SU(2) gauge potential topological structure and bifurecation of SU(2) Chern density J. Math. Phys. 1998, **39：**4343-4355.

16、Xi-Guo Lee, Nuclear Physics Review, The decomposable Theory of gauge potential and its Application , 2000,17:201[李希国，规范势的可分解理论及其应用，原子核物理评论,2000,**17**：201]

17、Jia Duo-je, Duan yi-shi, Li Xi-Guo, Circulation condition of the Two-Component Bose-Einstein Condensate, *Phys.Lett.A , 2001,***289:**245

18、Xi-guo Lee, Duo-Je Jia, Yuan Gao， Decomposition of the SU(2) gauge field and circulation condition of the Bose-Einstein condensate, C. P. C. , , 2003, **27**:12

19、Xi-Guo Lee， New Torsion structure on Riemann-Cartan manifold and knots, C.P.C., 1999,**23**:906;

20、Xi-Guo Lee, Marcllo Baldo, Yi-shi Duan,Torsion Structure in Riemann-Cartan Manifold and Dislocation, General Relativity and Gravity, 2002,**34(10)**:1569

21、Mo-Lin Ge，Rong-Gen Cai，Yu-XiaoLiu，Memorial Volume for Yi-Shi Duan, 2018, World Scientific.

Decomposition theory of gauge potential and global topology problems*

Xi-Guo Lee

Institute of modern physics, Chinese Academy of Sciences, lanzhou, 7300000

Absrtact: Using the idea of decomposability of gauge potential and internal structure put forward by Duan Yi Shi, we decompose gauge potential of SO(n) group in the unit vector field by using geometric algebra method, We get the general decomposition form and discuss the properties of this decomposition. In this paper, we give the form of decomposition of SU(2) group and U(1) group with unit vector field, which is exactly the result given by famous physicist Fadeev in 1999. The local topological structure of Gauss-Bonnet-Chern density is discussed by using the general form of decomposition of SO(n) gauge potential.The global topological structure of the density is Gauss-Bonnet-Chern theorem, and the Morse theoretical form of Euler- Poincar é characteristic is easily obtained from the topological

structure. A new circulation condition is obtained by using the normal potential decomposition of SU(2) gauge potential to study -1 / 2 Bose-Einstein condensate, which is also a generalization of the Mernin-Ho relation. Finally, using the relation between Torsion tensor and U(1) gauge theory of three-dimensional Riemannian geometry discovered by Duan Yi-shi, the relation between dislocation line and link number is studied by using U(1) gauge potential decomposition.

Keyword: Decomposition of gauge potential; Global Topology ; Link Number

Pacs：11.15-q；02.40.Ma; 02.10.kn

* supported by the National Science Foundation of Chian（Grant Nod.11575254)